

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO
LICENCIATURA EN CIENCIA DE DATOS
GUÍA DE MÉTODOS NUMÉRICOS

1.- Considerando una representación de números de punto flotante de 32 bits, en la que se tiene la siguiente especificación:

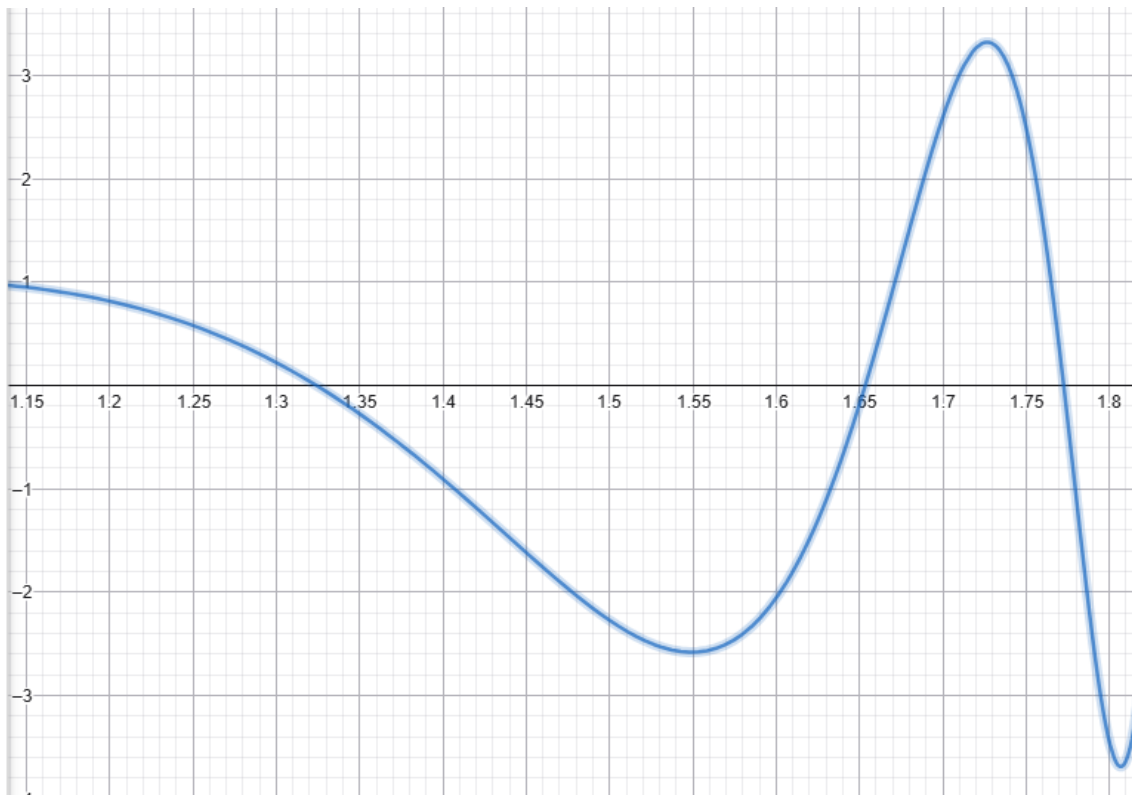
elemento	Número de bits
Bit de signo	1
Exponente (Característica)	11
Parte fraccionaria(Mantisa)	20

- a) Obtenga la representación binaria (**normalizada**) del número 2465.87543
b) Obtenga el número decimal inmediatamente menor y el número inmediatamente mayor a:

1 1 1 1 0 0 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

2.-a) Calcule el número mínimo de iteraciones que se requiere para obtener una aproximación **a una raíz**, con el método de bisección, de :

$$f(x) = \frac{7x^2}{x-8} \sin\left(\frac{x^2-6}{x-2}\right) \quad \text{con un error máximo de } 1 \times 10^{-7}$$



- b) Calcule 3 iteraciones considerando el intervalo que utilizó en el inciso a)

3.- El problema de encontrar la raíz de una función $f(x)$ se puede transformar en un problema de encontrar un punto fijo de una función $g(x)$. Para encontrar una raíz de la función:

$$f(x) = 7x^5 - 5x^3 + 6x^2 - 20$$

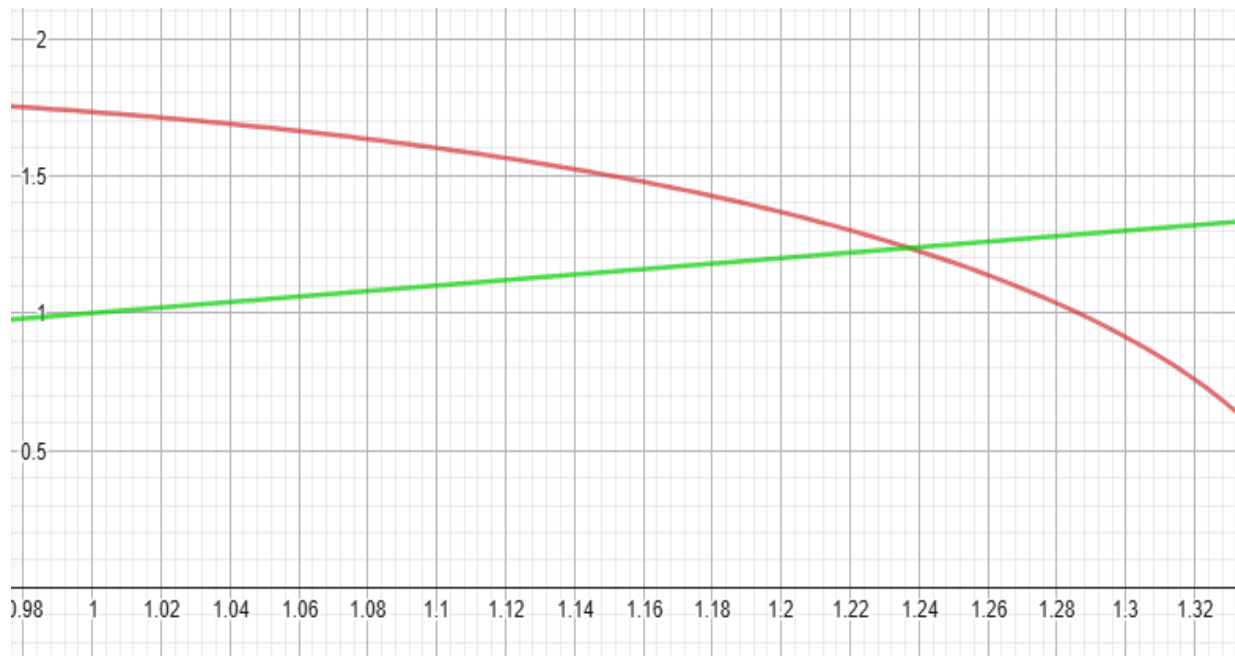
Podemos transformar, mediante operaciones algebraicas, este problema en uno de punto fijo.

- a) Determine para cuales de las siguientes funciones $g(x)$ se puede garantizar la convergencia de la iteración de punto fijo en un intervalo $[a, b]$, e indique el intervalo

NOTA: En todas las gráficas la línea de color verde corresponde a la grafica de $y = x$

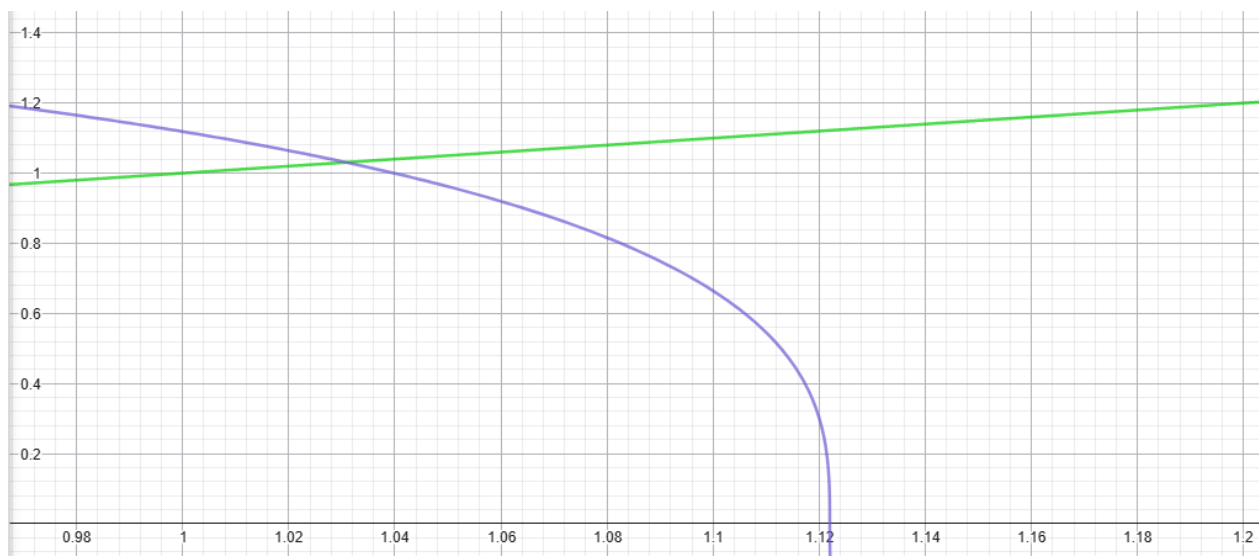
a.1)

$$g1(x) = \left(\frac{20 + 5x^3 - 7x^5}{6} \right)^{\frac{1}{2}}$$

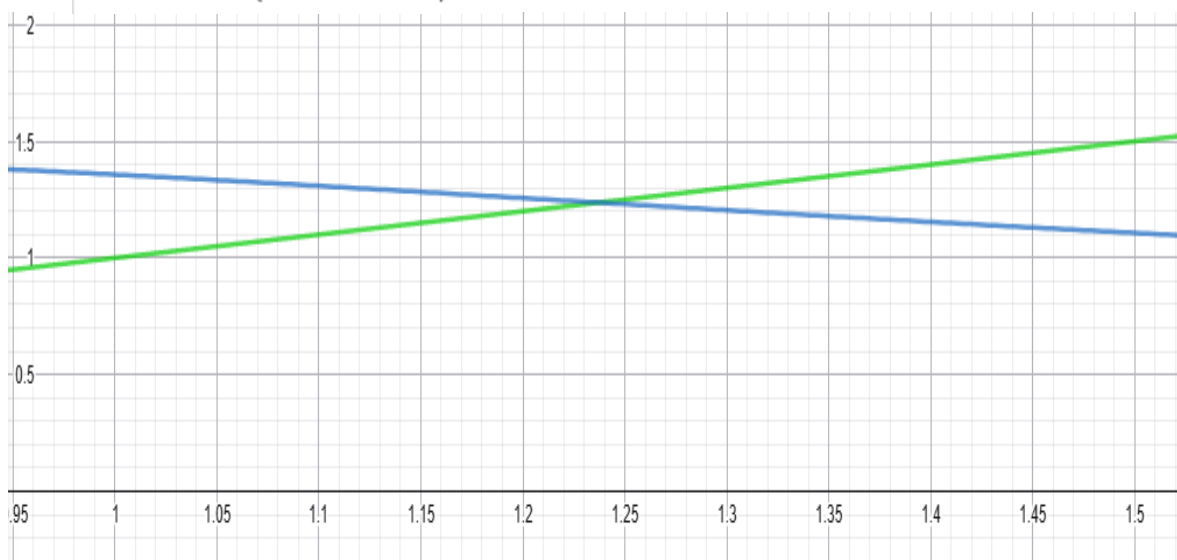


a.2)

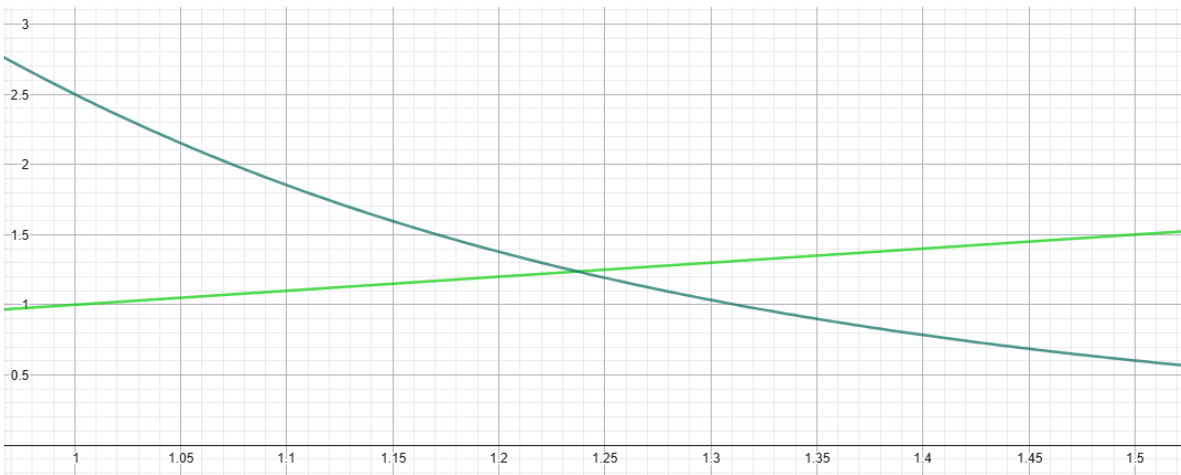
$$g2(x) = \left(\frac{20 - 6x^2 - 7x^5}{5} \right)^{\frac{1}{3}}$$



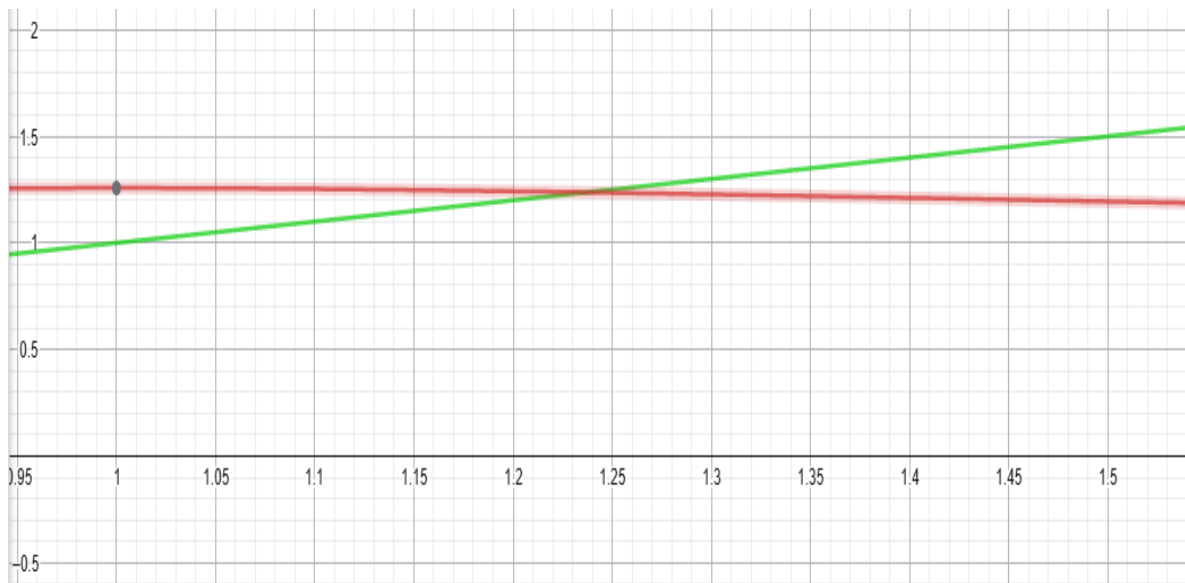
a.3)
$$g_5(x) = \left(\frac{20}{7x^2 - 5 + \frac{6}{x}} \right)^{\frac{1}{3}}$$



a.4) $g_4(x) = \frac{20}{7x^4 - 5x^2 + 6x}$



a.5) $g_6(x) = \left(\frac{20}{7x - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}} \right)^{\frac{1}{4}}$



- b) Considerando las funciones para las que se garantiza la convergencia de la sucesión de punto fijo en un intervalo $[a,b]$, Utilice GeoGebra u otro software para derivar y graficar la derivada de la función $g(x)$ y determinar si se cumple la condición para la unicidad del punto fijo en el intervalo $[a,b]$.

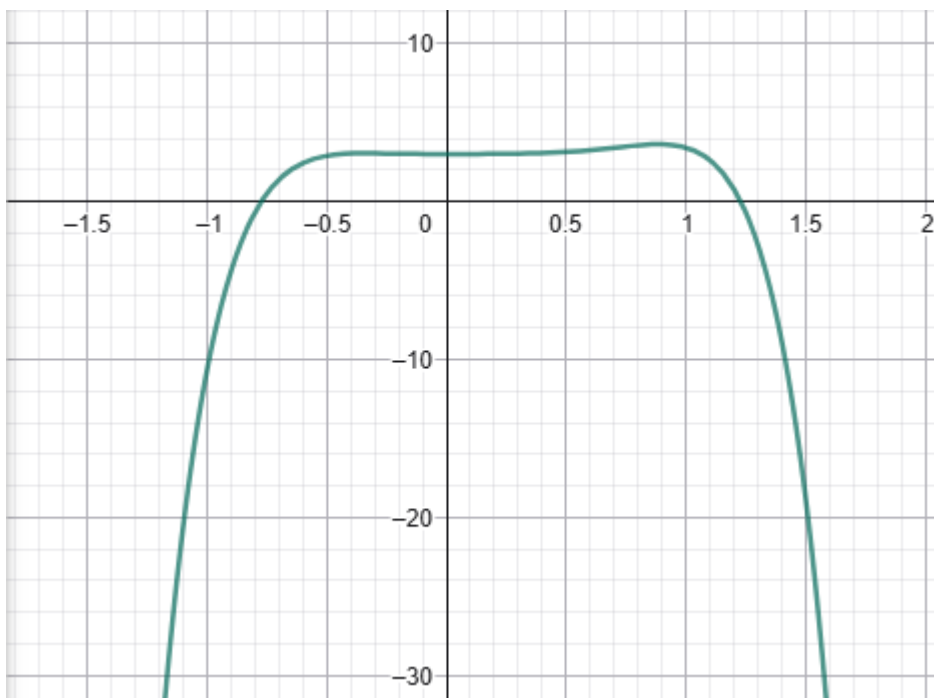
Indique en que funciones $g(x)$ se cumple la condición para la unicidad del punto fijo en $[a,b]$ y justifique su respuesta.

- c) Obtenga el punto fijo con un error máximo de 1×10^{-5} , de la funciones $g(x)$ para las cuales se cumplieron las condiciones de existencia y de unicidad del punto fijo en un intervalo $[a,b]$
- d) Determine el número mínimo de iteraciones que se requieren, para cada una de las funciones $g(x)$ del inciso c), para obtener un punto fijo con un error máximo de 1×10^{-9}

- 4) Obtenga las aproximaciones, utilizando el método de la secante, de 2 raíces de la función

$$f_2(x) = -7x^6 + 8x^5 - x^3 + \ln(10x^2 + 20)$$

Con un error máximo de 1×10^{-4}



- 5) Resuelva e problema 4 aplicando el método de la falsa posición

6) Resuelva el siguiente problema utilizando el método de la secante. Error máximo de 1×10^{-4}

En el diseño de los vehículos todo terreno, es necesario considerar la falla del vehículo al tratar de superar dos tipos de obstáculos. Un tipo de falla recibe el nombre de *falla compleja* y se presenta cuando el vehículo intenta cruzar un obstáculo que causa que la parte inferior del vehículo toque el suelo. El otro tipo recibe el nombre de *falla de nariz* y se presenta cuando el vehículo descende en una zanja y su nariz toca el suelo.

La figura de acompañamiento, adaptada de [Beck], muestra los componentes relacionados con la falla de nariz de un vehículo. En esta referencia, se muestra que el ángulo máximo a que un vehículo puede superar cuando β es el ángulo máximo en el que la falla compleja no ocurre satisface la ecuación

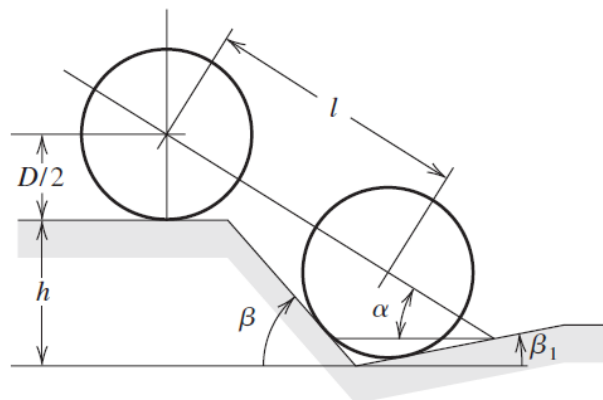
$$A \sin \alpha \cos \alpha + B \sin^2 \alpha - C \cos \alpha + E \sin \alpha = 0,$$

donde

$$A = l \sin \beta_1, \quad B = l \cos \beta_1, \quad C = (h + 0.5D) \sin \beta_1 - 0.5 D \tan \beta_1,$$

$$\text{y } E = (h + 0.5 D) \cos \beta_1 - 0.5 D.$$

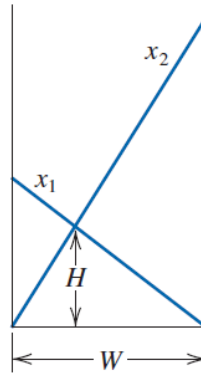
- Se establece que cuando $l = 89$ pulgadas, $h = 49$ pulgadas, $D = 55$ pulgadas y $\beta_1 = 11.5^\circ$, el ángulo α es aproximadamente 33° . Verifique el resultado.
- Encuentre α para la situación cuando l, h y β_1 son las mismas en la parte a) pero $D = 30$ pulgadas.



7.- Resuelva el siguiente problema usando secante, falsa posición y Newton-Raphson

Error máximo de 1×10^{-4}

Dos escaleras se entrecruzan en un pasillo de ancho W . Cada escalera llega desde la base de una pared hasta algún punto en la pared opuesta. Las escaleras cruzan a una altura H sobre el pavimento. Encuentre W dado que las longitudes de las escaleras son $x_1 = 20$ pies y $x_2 = 30$ pies, y que $H = 8$ pies.



Problema 8, sección 2.6 del libro de Richard Burden

8) Problemas del libro Chapra

5.13 La velocidad v de un paracaidista que cae está dada por

$$v = \frac{gm}{c} (1 - e^{-(c/m)t})$$

donde $g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Para un paracaidista con coeficiente de resistencia de $c = 15 \text{ kg/s}$, calcule la masa m de modo que la velocidad sea $v = 36 \text{ m/s}$ en $t = 10 \text{ s}$. Utilice el método de la falsa posición para determinar m a un nivel de $\varepsilon_s = 0.1\%$.

5.14 Use bisección para determinar el coeficiente de resistencia necesario para que un paracaidista de 82 kg tenga una velocidad de 36 m/s después de 4 s de caída libre. *Nota:* La aceleración de la gravedad es 9.81 m/s^2 . Comience con valores iniciales de $x_l = 3$ y $x_u = 5$. Itere hasta que el error relativo aproximado caiga por debajo de 2% . Realice también una detección de errores sustituyendo su respuesta final en la ecuación original.

5.15 Como se ilustra en la figura P5.15, la velocidad del agua, v (m/s), en la descarga de un tanque cilíndrico a través de un tubo largo se puede calcular como

$$v = \sqrt{2gH} \tanh\left(\frac{\sqrt{2gH}}{2L}t\right)$$

donde $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, H = carga hidrostática inicial (m), L = longitud de tubo (m) y t = tiempo transcurrido (s). Determine la carga hidrostática necesaria para obtener $v = 5 \text{ m/s}$ en 2.5 s para un tubo de 4 m de longitud *a)* gráficamente, *b)* por bisección y *c)* con posición falsa. Utilice los valores iniciales de $x_1 = 0$ y $x_u = 2 \text{ m}$, con un criterio de detención de $\varepsilon_s = 1\%$. Revise sus resultados.

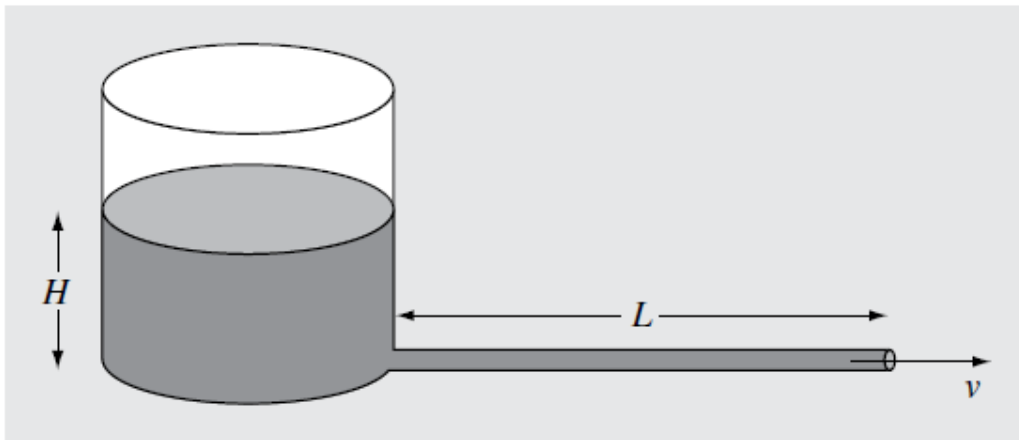


Figura P5.15

5.17 Suponga el lector que está diseñando un tanque esférico (véase la figura P5.17) para almacenar agua para un poblado pequeño en un país en desarrollo. El volumen de líquido que puede contener se calcula con

$$V = \pi h^2 \frac{[3R - h]}{3}$$

donde V = volumen [m^3], h = profundidad del agua en el tanque [m] y R = radio del tanque [m].

Si $R = 3$ m, ¿a qué profundidad debe llenarse el tanque de modo que contenga 30 m^3 ? Haga tres iteraciones con el método de la falsa posición a fin de obtener la respuesta. Determine el error relativo aproximado después de cada iteración. Utilice valores iniciales de 0 y R .

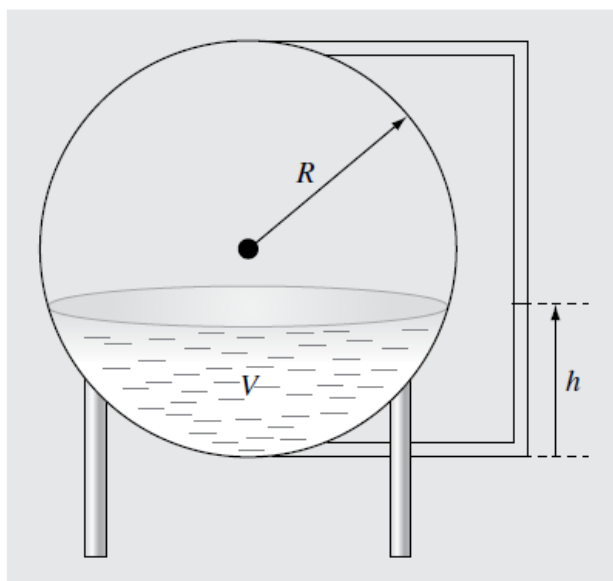


Figura P5.17

5.19 De acuerdo con el *principio de Arquímedes*, la fuerza de *flotación* es igual al peso de fluido desplazado por la porción sumergida de un objeto. Para la esfera ilustrada en la figura P5.19, use la bisección para determinar la altura h de la porción que queda encima del agua. Utilice los siguientes valores para su cálculo: $r = 1$ m, $\rho_s =$ densidad de la esfera $= 200$ kg/m³ y $\rho_w =$ densidad del agua $= 1\,000$ kg/m³. Observe que el volumen de la porción de la esfera por encima del agua se puede calcular mediante

$$V = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$$

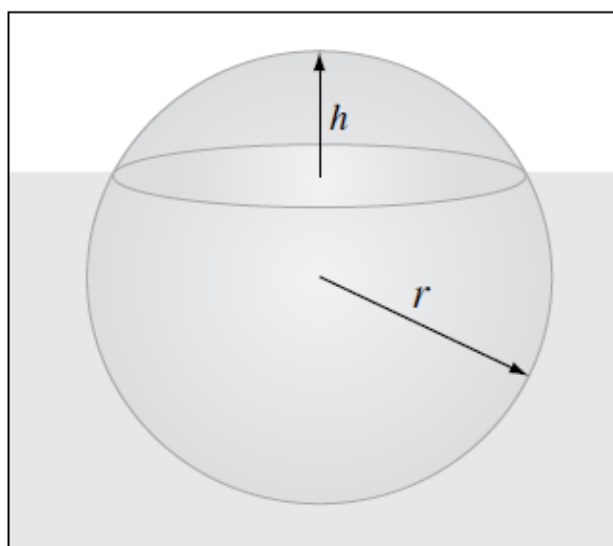


Figura P5.19

NOTA: Para determinar las cotas de los errores, use GeoGebra u otro software para obtener la aproximación al máximo de las derivadas involucradas.

9.- Considerando la función $f(x) = 3x^2 \sin(5x - 8) + \cos(3x + 4)$

a) Obtenga las aproximaciones de la derivada en los puntos x_i aplicando la formula de 3 y 5 puntos que proporcione la mejor aproximación.

x_i	2.0	2.1	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
-------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

b) Obtenga las cotas de los errores en cada punto, utilice geogebra u otro software para este fin.

c) Compare los errores reales con la cota del error.

10.- Considere la función $f(x) = \frac{2x^3 + 15\cos(8-5x)}{e^{2x-8} + 7}$ y los puntos

X_i	1.5	1.8	2.1	2.4	2.7	3.0
-------	-----	-----	-----	-----	-----	-----

- Obtenga el polinomio interpolante en los puntos X_i , utilizando diferencias divididas
- Derive el polinomio interpolante obtenido en a) y aproxime las derivadas en x_i , utilizando este polinomio
- Obtenga las aproximaciones de las derivadas usando las fórmulas de 3 y 5 puntos que proporcionen las mejores aproximaciones.
- Compare las aproximaciones de las derivadas obtenidas en b) y c) ¿Cuál es mejor?

11.-

a) Obtenga el polinomio interpolante de Lagrange en los puntos (x_i, f_i) ,

$$f(x) = e^{2x} \cos(3x)$$

X_i	5	5.2	5.5	5.7	6.0	6.2
-------	---	-----	-----	-----	-----	-----

b) Obtenga la cota del error para el polinomio interpolante.

c) Use el polinomio interpolante para aproximar a $f(x)$ en los sig. Valores

X_i	5.1	5.3	5.6	5.9	6.1	6.4
-------	-----	-----	-----	-----	-----	-----

- Obtenga el error real de cada aproximación y compare con la cota del error.
- Obtenga las aproximaciones del inciso c) utilizando el método de Neville

12.- Problemas del Burden, 10ª Edición. Sección 4.2

1. Aplique el proceso de extrapolación descrito en el ejemplo 1 para determinar $N_3(h)$, una aproximación para $f'(x_0)$, para las funciones y los tamaños de paso siguientes.

a. $f(x) = \ln x, x_0 = 1.0, h = 0.4$

c. $f(x) = 2^x \sin x, x_0 = 1.05, h = 0.4$

b. $f(x) = x + e^x, x_0 = 0.0, h = 0.4$

d. $f(x) = x^3 \cos x, x_0 = 2.3, h = 0.4$

5. Los siguientes datos dan aproximaciones para la integral

$$M = \int_0^{\pi} \sin x \, dx.$$

$$N_1(h) = 1.570796, \quad N_1\left(\frac{h}{2}\right) = 1.896119, \quad N_1\left(\frac{h}{4}\right) = 1.974232, \quad N_1\left(\frac{h}{8}\right) = 1.993570.$$

Al suponer que $M = N_1(h) + K_1h^2 + K_2h^4 + K_3h^6 + K_4h^8 + O(h^{10})$, construya una tabla de extrapolación para determinar $N_4(h)$.

6. Los siguientes datos se pueden usar para aproximar la integral

$$M = \int_0^{3\pi/2} \cos x \, dx.$$

$$N_1(h) = 2.356194, \quad N_1\left(\frac{h}{2}\right) = -0.4879837,$$

$$N_1\left(\frac{h}{4}\right) = -0.8815732, \quad N_1\left(\frac{h}{8}\right) = -0.9709157.$$

Suponga que existe una fórmula del tipo dado en el ejercicio 5 y determine $N_4(h)$.

- 13.- Para las siguientes integrales:

13.1) $\int_1^5 2x^3 (\cos(x-7) + \sin(x)) dx$

13.2) $\int_3^8 \frac{e^{(5-2x)\sin(x)}}{5x^3-2x+7} dx$

a) Determine el valor de h (tamaño de paso) para que utilizando el método del “Trapezio Compuesto” se obtenga un error de a lo más 1×10^{-4}

b) Determine el valor de h (tamaño de paso) para que utilizando el método del “Simpson 1/3 Compuesto” se obtenga un error de a lo más 1×10^{-4}

14) Aplique cuadratura adaptiva para obtener las aproximaciones a las integrales del problema (13) con un error máximo de 1×10^{-4}

14.1 Utilizando Trapecio

14.2 Utilizando Simpson 1/3

15.- Utilice cuadratura Gaussiana “compuesta” para calcular las integrales del problema 5. Considere dividir el intervalo de integración en 3 subintervalos, y a cada subintervalo aplicarle Cuadratura Gaussiana con $n = 4$, es decir:

Integral = CuadGaussiana(primer subintervalo, $n=4$) + CuadGaussiana(segundo subintervalo, $n=4$) + CuadGaussiana(tercer subintervalo, $n=4$)

16) Aproxime los valores de las siguientes integrales dobles con $n=8$ y $m=12$

a.
$$\int_{2.1}^{2.5} \int_{1.2}^{1.4} xy^2 dy dx$$

b.
$$\int_0^{0.5} \int_0^{0.5} e^{y-x} dy dx$$

c.
$$\int_2^{2.2} \int_x^{2x} (x^2 + y^3) dy dx$$

d.
$$\int_1^{1.5} \int_0^x (x^2 + \sqrt{y}) dy dx$$

Por medio de:

16.1) Trapecio compuesto

16.2) Simpson 1/3 compuesto

NOTA: A menos que se indique lo contrario, utilice aritmética de truncamiento a 6 decimales.

17.- Obtenga las aproximaciones a la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de valor inicial, aplicando el método de Euler:

a) $y' = t^{-2}(\sin(2t) - 2ty)$ $1 \leq t \leq 2$, $y(1) = 2$, $h = 0.1$

b) $y' = -ty + 4ty^{-1}$ $0 \leq t \leq 2$, $y(0) = 0.5$, $h = 0.1$

18.- Use el método de Taylor de orden 3 para aproximar las soluciones de las siguientes EDO de valor inicial:

a) $y' = \cos(2t) + \sin(2t)$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 1$, $h = 0.2$

b) $y' = t^{-2}(\sin(2t) - 2ty)$, $1 \leq t \leq 2$, $y(1) = 1$, $h = 0.1$

19.- Resuelva las ecuaciones del problema 18, aplicando el método de Taylor de orden 3.

20.- Use el método de Taylor de orden 4 para aproximar las soluciones de las siguientes EDO de valor inicial:

a) $y' = \frac{2}{t}y + t^2e^t$, $1 \leq t \leq 2$, $y(1) = 0$, $h = 0.1$

b) $y' = -ty + 4ty^{-1}$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 1$, $h = 0.2$

21.- Obtenga el Polinomio de Taylor $P_3(t, y)$ cerca (alrededor) de $(1, 2)$ para la función:

$$f(t, y) = e^{\left[-\frac{(t-1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{4}\right]} \sin(2t + y - 4)$$

Grafique $f(t, y)$ y $P_3(t, y)$

22.- Use el método de Runge-Kutta de orden 4 para aproximar las soluciones de las siguientes EDO de valor inicial:

22.1)

a. $y' = \frac{2-2ty}{t^2+1}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 1, \text{ con } h = 0.1; \text{ solución real } y(t) = \frac{2t+1}{t^2+1}.$

b. $y' = \frac{y^2}{1+t}, \quad 1 \leq t \leq 2, \quad y(1) = \frac{-1}{\ln 2}, \text{ con } h = 0.1; \text{ solución real } y(t) = \frac{-1}{\ln(t+1)}.$

22.2) Grafique la función de la solución exacta y los puntos obtenidos en las aproximaciones.

22.3) Considerando los valores (t_i, y_i) obtenidos como aproximaciones :

- a) Obtenga el polinomio por mínimos cuadrados de grado 3
- b) Obtenga el polinomio por mínimos cuadrados de la forma be^{ax}
- c) Obtenga el polinomio por mínimos cuadrados de la forma bx^a

¿Cuál aproxima mejor?

b) función de la forma:

23.- Use el método de Runge-Kutta-Fehlberg para aproximar las soluciones de las siguientes EDO de valor inicial, con una cota del error de 1×10^{-6} . Compare las aproximaciones con la solución exacta.

a) $y' = \frac{y}{t} - \left(\frac{y}{t}\right)^2, \quad 1 \leq t \leq 4, \quad y(1) = 1, \quad \text{sol. real. } y(t) = \frac{t}{1 + \ln(t)}$

b) $y' = (t + 2t^3)y^3 - ty, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = \frac{1}{3}, \quad \text{sol. real. } y(t) = \left(3 + 2t^2 + 6e^{t^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

24.- Muestre el procedimiento detallado para deducir los métodos de Adams-Bashforth y Adams-Moulton de 2º Orden

25.- Aplique los métodos de Adams-Bashforth de orden 2,3 y 4 para obtener las aproximaciones de los siguientes problemas de valor inicial. Para los valores iniciales use los valores obtenidos con el método de RK-4

a) $y' = 1 + \frac{y}{t} + \left(\frac{y}{t}\right)^2, \quad 1 \leq t \leq 3, \quad y(1) = 0, \quad h = 0.1$

b) $y' = -(y+1)(y+3), \quad 1 \leq t \leq 2, \quad y(1) = -2, \quad h = 0.1$

26.- Aplique los métodos de Adams-Moulton de orden 3 y 4 para obtener las aproximaciones de los siguientes problemas de valor inicial. Para los valores iniciales use los valores obtenidos con el método de RK-4

a) $y' = te^{3t} - 2y, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 0, \quad h = 0.1$

b) $y' = 1 + \frac{y}{t}, \quad 1 \leq t \leq 2, \quad y(1) = 2, \quad h = 0.1$

27.- Aplique el método de RK-4 para aproximar las soluciones de las siguientes EDO de orden superior.

a) $y''' + 2y'' - y' - 2y = e^t, \quad 0 \leq t \leq 3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 0, \quad h = 0.1$

b) $t^3 y''' - t^2 y'' + 3ty' - 4y = 5t^3 \ln(t) + 9t^3, \quad 1 \leq t \leq 2, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1, \quad y''(1) = 3, \quad h = 0.1$

28.- Aplique eliminación Gaussiana y aritmética de truncamiento a 4 decimales para resolver los siguientes SEL.

a) $3.3330x_1 + 15920x_2 + 10.333x_3 = 7953$

$2.2220x_1 + 16.710x_2 + 9.6120x_3 = 0.965$

$-1.5611x_1 + 5.1792x_2 - 1.6855x_3 = 2.714$

Solución real: $[1, 0.5, -1]$

b) $2.12x_1 - 2.12x_2 + 51.3x_3 + 100x_4 = \pi$

$0.333x_1 - 0.333x_2 - 12.2x_3 + 19.7x_4 = \sqrt{2}$

$6.19x_1 + 8.20x_2 - 1.00x_3 - 2.01x_4 = 0$

$-5.73x_1 + 6.12x_2 + 1.00x_3 - 1.00x_4 = -1$

Solución real: $[0.0998, -0.0683, -0.0363, 0.0465]$

29.- Resuelva los sistemas del problema 28, aplicando:

a) Pivoteo parcial (máximo de columna)

b) Pivoteo parcial escalado

c) Pivoteo total

29.- Factorice las siguientes matrices como un producto LU

a)
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{3} & \frac{3}{8} \\ \frac{2}{5} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{8} \end{bmatrix}$$

$$b) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

30.- Obtenga la factorización $A = P^tLU$ para las siguientes matrices:

$$a) A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b) A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 9 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

31.- Considerando los siguientes datos:

x_i	4.0	4.2	4.4	4.7	5.2	5.3	5.8	6.3	6.7	7.1
y_i	102.56	113.18	130.11	142.05	167.53	195.14	224.87	256.73	299.50	326.72

- d) Obtenga el polinomio por mínimos cuadrados de grado 3
- e) Obtenga el polinomio por mínimos cuadrados de la forma be^{ax}
- f) Obtenga el polinomio por mínimos cuadrados de la forma bx^a